Steps in Commutative Algebra 题解

2022 年 1 月 29 日

为了仔细学习局部化、整扩张和维数理论，我从 *Sharp, R. Y.* Steps in Commutative Algebra. 2nd ed. New York : Cambridge University Press, 2000 中选择了一些相关题目并写了题解，并对书中一些证明写了注记.

1 Ideals

2.25(iv) 设 R 是交换环，I, J 是其理想，则若 $\sqrt{I}+\sqrt{J}=(1)$，则 $I+J=(1)$.

证明. 若 $a+b=1$，其中 $a^n \in I, b^m \in J$，$n, m \in \mathbb{N}$，则 $(a+b)^{n+m}=1$. 将 $(a+b)^{n+m}$ 展开，每一项或者 a 的指数大于等于 n，此时这一项属于 I；或者 b 的指数大于等于 m，此时这一项属于 J. 于是得到 I, J 中的元的和为 1，即 $I+J=(1)$.

注记. *用于 4.9 从 $\sqrt{Q}+\sqrt{(b)}=R$ 导出 $Q+(b)=R$，进而可以将 1 表示为 Q 和 (b) 中元的和，从而 $a=a1 \in Q$.*

2.30 设 I, J 是交换环 R 的理想，则

$$\sqrt{IJ}=\sqrt{I \cap J}=\sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

证明. 显然 $IJ \subset I \cap J$，于是 $\sqrt{IJ} \subset \sqrt{I \cap J}$. 如果 $a^n \in I \cap J$，则 $a^{2n} \in IJ$，故 $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{IJ}$. 这就证明了第一个相等.

如果 $a^n \in I \cap J$，则 $a^n \in I, a^n \in J$，所以 $a \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$，另一方面，如果 $a \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$，设是 $a^n \in I, a^m \in J$，则 $a^{n+m} \in I \cap J$，于是 $a \in \sqrt{I \cap J}$. 这就证明了第二个相等.

注记.

1. *这一命题在准素分解中反复用到，比如，用于 4.13 证明 P-准素理想的交还是 P-准素理想.*
2. *$IJ=I \cap J$ 不一定成立，例如对于 $\mathbb{Z}$，$(2) \cap (2) \neq (4)=(2)(2)$. 但是总有 $\sqrt{IJ}=\sqrt{I \cap J}$. 特别地，$\sqrt{I^n}=\sqrt{I}$.*

2.33(ii) 令 I, J, K 是交换环 R 的理想，$(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 是 R 的一族理想. 则 $(\cap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda : K)=\cap_{\lambda \in \Lambda}(I_\lambda : K)$.

证明. 因为 $a \in (\cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K) \Leftrightarrow \forall k \in K : ak \in \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \Leftrightarrow \forall k \in K : \forall\lambda \in \Lambda : ak \in I_\lambda \Leftrightarrow \forall\lambda \in \Lambda : a \in (I_\lambda : K) \Leftrightarrow a \in \cap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda : K)$.

注记. 用于 4.17 证明 $(I : a_n)$ 是 P-准素的.

2.42 设 R 和 S 是交换环，$f : R \to S$ 是环同态. I 是 R 的理想，由集合 H 生成. 证明 I^e 由 $f(H) = \{f(h) : h \in H\}$ 生成.

证明. $H \subset I$，故 $f(H)$ 生成的理想，姑且记为 H^e，含于 $f(I)$ 生成的理想 I^e. 现在任取 I^e 的元，它是有限个 $f(I)$ 的元的 S-线性组合，后者又分别是有限个 $f(H)$ 的元的 S-线性组合，于是 $I^e \subset H^e$. 故 I^e 由 $f(H)$ 生成.

2.43(iv) 条件同上，J 是 S 的理想，则 $(\sqrt{J})^c = \sqrt{J^c}$.

证明. 因为有 $a \in (\sqrt{J})^c \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : f(a)^n \in J \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : f(a^n) \in J \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in J^c \Leftrightarrow a \in \sqrt{J^c}$.

注记. 本题结论用在 4.6 节的注记中，证明如果 Q 是 P-准素理想，则这一关系可以沿同态拉回.

2.46 设 $f : R \to S$ 是交换环的满同态. 用 $\mathcal{C}_R$ 和 $\mathcal{E}_S$ 表示收缩理想和扩张理想的集合. 证明

$$\mathcal{C}_R = \{I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq \ker f\} \quad \text{且} \quad \mathcal{E}_S = \mathcal{I}_S.$$

从而得到双射

$$\begin{array}{ccc} \{I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq \ker f\} & \to & \mathcal{I}_S \\ I & \mapsto & f(I) \end{array}$$

证明. 因为 $(0) \subset J \subset S$，故 $\ker f \subset J^c$，这表明 $\{I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq \ker f\} \supset \mathcal{C}_R$. 如果 $\ker f \subset I$，我们证明 $I^{ec} = I$，从而 $I \in \mathcal{C}_R$. 显然 $I \subset I^{ec}$. 下面设 $f(a) \in I^e$，则 $f(a) = \sum b_n f(a_n)$ 为有限和，其中 $a_n \in I$ 而 $b_n \in S$. 因为 f 是满同态，故存在 b_n' 使 $f(b_n') = b_n$，这时 $f(\sum b_n' a_n - a) = 0$，于是 $\sum b_n' a_n - a \in \ker f, a \in \sum b_n' a_n + \ker f \subset I$. 故 $I^{ec} \subset I$. 这就证明了第一个相等.

显然 $\mathcal{E}_S \subset \mathcal{I}_S$. 设 $J \in \mathcal{I}_S$，我们证明 $J = J^{ce}$，从而 $J \in \mathcal{E}_S$. 显然 $J^{ce} \subset J$. 由于 f 是满射，则对于 $a \in J$ 都存在 $b \in R$ 使 $f(b) = a$. 显然 $b \in J^c$ 而 $a = f(b) \in J^{ce}$. 故 $J = J^{ce}$. 最后，所要的双射由 2.45 得到.

2 Prime ideals and maximal ideals

3.15 证明 $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ 是 $K[X_1, \ldots, X_n]$ 的极大理想，其中 $a_i \in K$.

证明. 定义赋值映射 $\mathrm{ev} : K[X] \to X, \mathrm{ev}(f) = f(a_1, \ldots, a_n)$，它显然是同态. 因为 $\mathrm{ev}(c) = c, c \in K$，所以是满同态. 下面考虑 $\ker \mathrm{ev}$. 显然 $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \subset \ker \mathrm{ev}$. 如果 $f \in \ker \mathrm{ev}$，则对 f 用带余除法，可以得到 $f = (X_1 - a_1)g_1 + f_1$，其中 f_1 不含字母 X_1，然后用 $X_2 - a_2$ 除 f_1，得 $f_1 = (X_2 - a_2)g_2 + f_2$，其中 f_2 不含字母 X_1, X_2，依此类推，得 $f = f_n + \sum (X_i - a_i)g_i$，

其中 f_n 不含字母 $X_1,\ldots,X_n$，故是常数. 因为 $\mathrm{ev}(f)=0$，故 $f_n=0$，这证明了 $f\in(X_1-a_1,\ldots,X_n-a_n)$. 于是 $\ker\mathrm{ev}=(X_1-a_1,\ldots,X_n-a_n)$，$K[X]/(X_1-a_1,\ldots,X_n-a_n)\cong K$ 为域，故 $(X_1-a_1,\ldots,X_n-a_n)$ 是极大理想.

注记. *用于例 4.12.*

3.47 对交换环 R 的素理想 P 和任意 $n\in\mathbb{N}$，有 $\sqrt{P^n}=P$.

证明. 回忆 2.30，则 $\sqrt{P^n}=\sqrt{P}$. 显然 $P\subset\sqrt{P}$，而如果 $a^n\in P$，则必有 $a\in P$，故 $\sqrt{P}\subset P$. 于是 $\sqrt{P^n}=P$.

注记. *第 4 章开头引入准素分解和 4.9 节证明对于极大理想 M，M^n 是 M-准素理想时用到此题结论.*

3.53 设 P,I 是交换环 R 的理想，P 是素理想，$P\supset I$. 证明非空集

$$\Theta:=\{P'\in\mathrm{Spec}(R):P\supset P'\supset I\}$$

有包含关系下的极小元. 于是存在 I 的极小素理想使 $P''\subset P$.

证明. 由 Zorn 引理，只要验证每条链都有下界. 设 $P\subset P_1\subset P_2\subset\cdots P$，令 $P'=\cap_{i=1}^{\infty}P_i$. 若 $ab\in P'$，则对于任何 i 都有 $a\in P_i$ 或 $b\in P_i$. 若 $a\notin P'$，则存在 j 使 $a\notin P_i$，则对于 $j\geq i$ 都有 $a\notin P_j$，此时一定有 $b\in P_j$，从而 $b\in P'$. 于是 P' 是素理想，$P'\in\Theta$. 即证.

注记. *用于 15.1.*

3.65(i) 设 R 是交换环，X 是不定元，$f:R\to R[X]$ 为自然映射，I 是 R 的理想，证明 I 是素理想当且仅当 I^e 是 $R[X]$ 的素理想.

证明. 设 I^e 是素理想. 如果在 R 中 $ab\in I$，则在 $R[X]$ 中 $ab\in I^e$，于是 $a\in I^e$ 或 $b\in I^e$. 不妨设 $a\in I^e$，则 $a=\sum c_if_i$（有限和），$c_i\in I,f_i\in R[X]$. 代入 $X=0$ 得 $a=\sum c_if_i(0)\in I$. 于是 I 是素理想.

如果 I 是素理想，则 R/I 是整环. 下面构造映射 $R[X]/I^e\to(R/I)[X],f(X)+I^e\mapsto\bar{f}(X)$，其中 $\bar{f}$ 的系数是 f 的系数在 R/I 中的像. 我们证明这是同构. 先证明其合理，则只要证明如果 $f(X)\in I^e$，则 $\bar{f}(X)=0$. 设 $f(X)=\sum c_if_i(X)$ 为有限和，$c_i\in I,f_i\in R[X]$，令 $X=0$ 得到 $f(0)\in I$. 两边同减 $f(0)=\sum c_if_i(0)$，则两边都是 X 的倍式，除以 X 后则降了一次，于是可以对次数归纳. 这样，知道 f 所有的系数在 I 中. 下面验证这映射是满同态，而这是显然的. 最后，如果 $\bar{f}(X)=0$，则 f 的系数均在 I 中，这时 $f(X)\in I^e$，反之亦然，故是同构. 这样，由 $(R/I)[X]$ 是整环，知道 I^e 是素理想.

注记. *用于例 4.12 的说明.*

3.67 设 $t\in\mathbb{N}$，$p_1,\ldots,p_t$ 是 t 个互异的质数，证明

$$R=\{\alpha\in\mathbb{Q}:\alpha=m/n,m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\text{ 使得}n\text{ 不被}p_1,\ldots,p_t\text{ 中的任何一个整除}\}$$

是 $\mathbb{Q}$ 的一个子环，恰有 t 个极大理想.

证明. $0, 1 \in R$. 不难验证 R 对加法和乘法封闭，所以是 $\mathbb{Q}$ 的子环. 我们证明 p_iR 均是极大理想且 R 的极大理想一定形如 p_iR, 从而恰有 t 个极大理想. 首先，任取 m, n 均不被 $p_1, \ldots, p_t$ 整除，则 $m/n \in R \setminus p_iR$，故 p_iR 是真理想. 又设 $m/n \in R \setminus p_iR$，其中 $(m, n) = 1$，则 $(m, np_i) = 1$，于是存在 x, y 使 $xm/n + ynp_i/n = 1$，故 $p_iR + (m/n)R = R$. 这表明 p_iR 是极大理想. 设 I 是 R 的一个极大理想，$m/n \in R$，则 m 必被 $p_1, \ldots, p_t$ 之一整除，否则 $(n/m)(m/n) = 1 \in I$ 与 I 是极大理想矛盾. 现在取定这样的 m/n，使 m 的素因子落入 $p_1, \ldots, p_t$ 的个数达到最小值，设是 $p_1, \ldots, p_r, r \leq t$. 如果对于任何 $p/q \in I$，都有 $p_i \mid p, 1 \leq i \leq t$，则 $I \subset p_1R$，由极大性一定有 $I = p_1R$. 不然，则存在 p/q 有 $p_r, \ldots, p_t$ 中的素因子. 我们知道可以用 $m/n, p/q$ 线性表示出 (mq, np)，而 (mq, np) 的素因子落入 $p_1, \ldots, p_t$ 的个数严格比 m 小，与极小性矛盾. 这样就证明了 R 的极大理想恰是 p_iR.

3 Primary decompostion

4.4 对于交换环 R 的理想 I，如果 R/I 不是平凡环，且 R/I 所有的零因子都是幂零的，则 I 是准素理想.

证明. 因为 $R/I \neq 0$，所以 $R \neq I$. 设 $ab \in I$，而 $a \notin I$，则 $(a+I)(b+I) = I$，因此或者 $b \in I$，或者 $b + I \neq I$ 是零因子，则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $(b+I)^n = b^n + I = I$. 于是总有 n 使 $b^n \in I$，则 I 是准素理想.

4.7 继续 2.46 的假设. 设 $I \in \mathcal{C}_R$，证明

(i) I 是 R 的准素理想，当且仅当 I^e 是 S 的准素理想，且

(ii) 此时，$\sqrt{I} = (\sqrt{I^e})^c$ 且 $\sqrt{I^e} = (\sqrt{I})^e$.

证明. (i) 设 I 是 R 的准素理想，$I = J^c$，$J = I^e$. 如果 $ab \in J, a \notin J$，设 $f(a') = a, f(b') = b$，则 $a'b' \in I, a' \notin I$（否则 $a = f(a') \in J$）. 此时有 $b'^n \in I$，从而 $b^n = f(b'^n) \in J$. 反之，如果 I^e 是 R 的准素理想，$I = I^{ec}$. 设 $ab \in I$ 而 $a \notin I$，则 $f(ab) \in I^e$.

如果 $f(a) \in I^e$，则 $a \in f^{-1}(f(a)) \subset I^{ec} = I$，矛盾，所以 $f(a) \notin I^e$，从而 $f(b^n) = f(b)^n \in I^e$. 于是 $b^n \in f^{-1}(f(b^n)) \subset I^{ec} = I$，即 I 也是准素理想.

(ii) 用 2.43(iv)，$(\sqrt{I^e})^c = \sqrt{I^{ec}} = \sqrt{I}$. 另一方面，这时 $\sqrt{I}$ 是一个收缩理想，所以由 2.46 知 $(\sqrt{I})^e = \sqrt{I^e}$.

4.8 设 I 是交换环 R 的一个真理想，P, Q 是 R 的含 I 的理想，证明 Q 是 P-准素理想当且仅当 Q/I 是 R/I 的一个 P/I-准素理想.

证明. 由 4.7 知 Q 是准素理想当且仅当 Q/I 是准素理想，而如果 Q 是准素理想，则 $\sqrt{Q}/I = \sqrt{Q/I}$，于是如果 Q 是 P-准素的，则 Q/I 是 P/I-准素的，反之亦然.

4.21 设 $f : R \to S$ 是交换环的同态，$\mathcal{I}$ 是 S 的一个可分解的理想.

(i) 设 $\mathcal{I} = \cap_{i=1}^n \mathcal{Q}_i$，其中 $\sqrt{\mathcal{Q}_i} = \mathcal{P}_i$，为 $\mathcal{I}$ 的准素分解. 则 $\mathcal{I}^c = \cap_{i=1}^n \mathcal{Q}_i^c$，其中 $\sqrt{\mathcal{Q}_i^c} = \mathcal{P}_i^c$ 为 $\mathcal{I}^c$ 的准素分解. 于是 $\mathcal{I}^c$ 也是可分解的理想，$\text{ass}_R(\mathcal{I}^c) \subseteq \{\mathcal{P}^c : \mathcal{P} \in \text{ass}_S \mathcal{I}\}$.

(ii) 现在假设 f 是满射，则如果 (i) 中的第一个准素分解是极小的，则第二个也是极小的，这时有

$$\operatorname{ass}_R(\mathcal{I}^c) = \{\mathcal{P}^c : \mathcal{P} \in \operatorname{ass}_S \mathcal{I}\}.$$

证明. (i) 由收缩素理想的性质，我们有 $\mathcal{I}^c = \cap_{i=1}^n \mathcal{Q}_i^c$，而 $\sqrt{Q_i^c} = \sqrt{Q_i}^c = P_i^c$. 我们知道 P_i^c 也是素理想. 设 $ab \in Q_i^c$，则 $f(ab) \in Q_i^c$，于是或者 $f(a) \in Q_i$ 或者 $f(b^n) = f(b)^n \in Q_i$. 因此 $a \in Q_i^c$ 或 $b^n \in Q_i^c$，即 Q_i 也是准素理想. 这样，$\mathcal{I}^c = \cap_{i=1}^n \mathcal{Q}_i^c$，其中 $\sqrt{\mathcal{Q}_i^c} = \mathcal{P}_i^c$ 为 $\mathcal{I}^c$ 的准素分解.

(ii) 这时，由 2.46 和 4.7，收缩和扩张建立起了 $\mathcal{C}_R$ 和 $\mathcal{E}_S$ 间的双射，所以 P_i^c 互不相同. 又设

$$Q_1^c \supset \bigcap_{i=2}^n Q_i^c = \left(\bigcap_{i=2}^n Q_i\right)^c,$$

则 $Q_1 \subset \bigcap_{i=2}^n Q_i$，与第一个分解的极小性矛盾. 所以第二个分解也是极小的. 由于第一唯一性定理，则得到 $\operatorname{ass}_R(\mathcal{I}^c)$ 正由所有 $\mathcal{P}^c$ 构成.

4.22 现在设 $f : R \to S$ 是交换环的满同态，I, Q_i, P_i 是 R 的含 $\ker f$ 的理想. 如果 $I = \cap_{i=1}^n Q_i$，其中 $\sqrt{Q_i} = P_i$ 是 I 的（极小）准素分解，那么 $I^e = \cap_{i=1}^n Q_i^e$，其中 $\sqrt{Q_i^e} = P_i^e$ 是 I^e 的（极小）准素分解，反之亦然，从而得到如果 I 是 R 的可分解的理想，则 I^e 是 S 的可分解的理想，而

$$\operatorname{ass}_S(I^e) = \{P^e : P \in \operatorname{ass}_R I\}.$$

证明. 由 2.46，这些理想都是其扩理想的收缩. 由 4.7，Q_i^e 是准素理想，$\sqrt{Q_i^e} = P_i^e$. 我们有 $I^e \subset \cap_{i=1}^n Q_i^e$. 如果 $I^e \subsetneq \cap_{i=1}^n Q_i^e$，取 $a \in \cap_{i=1}^n Q_i^e \setminus I^e$，考虑 $a' \in R, f(a') = a$，则因 $Q_i = Q_i^{ec}$，则 $a' \in Q_i$，故 $a' \in \cap_{i=1}^n Q_i = I$，于是 $a \in I^e$，矛盾. 这样 $I^e = \cap_{i=1}^n Q_i^e$ 正好构成 I^e 的准素分解. 极小性的证明和上一题类似，最后得到 $\operatorname{ass}_S(I^e) = \{P^e : P \in \operatorname{ass}_R I\}$.

4.26 设交换环 R 的可分解理想 I 满足 $\sqrt{I} = I$，则 I 没有嵌入素理想.

证明. 设 $I = \cap_{i=1}^n Q_i$ 是 I 的极小准素分解，则 $I = \sqrt{I} = \cap_{i=1}^n \sqrt{Q_i} = \cap_{i=1}^n P_i$ 也是 I 的准素分解（2.30）. 如果有 $P_i \subset P_j$，则可以得到更少元素的准素分解，与第一个分解的极小性矛盾.

注记. 我们还得到 $\sqrt{I} = I$ 的可分解理想是有限个不同的素理想的交.

4.28 设 K 是域，$R = K[X, Y]$ 为多项式环，$I = (X^3, XY)$.

(i) 证明对每个 $n \in \mathbb{N}$，理想 (X^3, XY, Y^n) 是准素的；

(ii) 证明 $I = (X) \cap (X^3, Y)$ 是 I 的极小准素分解.

(iii) 构造 I 的无穷多极小准素分解.

证明. (i) 我们计算 $\sqrt{(X^3, XY, Y^n)}$. 至少有 $X, Y \in \sqrt{(X^3, XY, Y^n)}$. 如果有 $f \in \sqrt{(X^3, XY, Y^n)}$，则 f 的常数项也属于 $\sqrt{(X^3, XY, Y^n)}$. 但 $\sqrt{I} \neq R$，故 f 的常数项等于 0. 这意味着 $\sqrt{(X^3, XY, Y^n)} = (X, Y)$. 后者是极大理想，由 4.9，则 (X^3, XY, Y^n) 是准素理想.

(ii) $(X^3,Y)=(X^3,XY,Y)$，故是准素理想.

再证分解成立. 显然 $I\subset (X)\cap(X^3,Y)$. 现设 $X^3f+Yg\in(X)$，则 $g\in(X)$. 于是 $X^3f+Yg=X^3f+XY(g/X)\in(X^3,XY)=I$. 于是分解成立，两个理想一个是素理想 (X)，一个是准素理想 (X^3,Y)，其根为 (X,Y).

显然 $(X)\subsetneq(X,Y)$，故分解是极小的.

(iii) 我们证明 $I=(X)\cap(X^3,XY,Y^n)$. 只要证明右边含于左边. 设 $X^3f+XYg+Y^nh\in(X)$, 则 $h=Xh'$, 于是 $X^3f+XYg+Y^nh=X^3f+XYg+Y^nXh'=X^3f+(Xg+Y^{n-1}Xh')Y\in I$. 于是构成 I 的准素分解，而且是极小的，因为 I 的极小准素分解需要两个元.

4.30 证明，在闭区间 $[0,1]$ 上定义连续实值函数环 $C[0,1]$ 中，零理想是不可分解的，即没有准素分解.

证明. 设 $P\in \mathrm{ass}_{C[0,1]}(0)$，由 4.17 存在 $0\neq f\in C[0,1]$ 使 $\sqrt{(0:f)}=P$. 我们证明 $(0:f)=P$. 首先，显然有 $(0:f)\subset P$. 任取 $a\in P$，则存在 n 使 $a^nf\in(0)$，即 $a^nf=0$. 如果对于 $x\in[0,1]$，$a(x)=0$，则 $a(x)f(x)=0$；否则，$a(x)\neq 0$，则 $a(x)f(x)=a(x)^nf(x)a(x)^{1-n}=0$. 总之，$af=0$，于是 $a\in(0:f)$，$P\subset(0:f)$，即证.

下面证明存在至多一个实数 $a\in[0,1]$ 使 $f(a)\neq 0$，从而和连续性矛盾. 首先，P 中的元一定有公共零点. 否则，对任何 $x\in[0,1]$，都存在 $f_x\in P$ 使 $f_x(x)\neq 0$，不妨设 $f_x\geq 0$，否则用 f_x^2 讨论. $V_x=\{t\in[0,1]:f_x(t)>0\}$ 是开集，所有 V_x 覆盖 $[0,1]$，则可选有限个 x_i 覆盖 $[0,1]$，这时 $\sum f_{x_i}\in P$ 在所有的 $x\in[0,1]$ 处都不等于零，即是可逆元，与 P 是素理想矛盾. 于是一定存在 $a\in[0,1]$，使所有 $g\in P$，都有 $g(a)=0$. 对任意 $b\neq a$，可取 V_a,V_b 为开集，$a\in V_a,b\in V_b$ 而 $V_a\cap V_b=\varnothing$. 可以构造连续函数 f_a,f_b，使 $f_a(a)=f_b(b)=1$，而 $f_a(V_a^c)=f_b(V_b^c)=0$，于是 $f_af_b=0\in P$，但 $f_a\notin P$，故 $f_b\in P$. 这表明 a 是 P 唯一的公共零点. 如果 f 有 a 以外的非零点 b，则用前面构造的 $f_b\in P$，应有 $0=ff_b$，但 $f(b)f_b(b)=f(b)\neq 0$，矛盾. 于是 f 至多一个零点 a.

4.32 设 $f:R\to S$ 是交换环的满同态，I 是 R 的含 $\ker f$ 的理想，证明 I 是 R 的不可约理想，当且仅当 I^e 是 S 的不可约理想.

证明. 如果 $I=I_1\cap I_2$，那么 I_1,I_2 含 $\ker f$，则 $I^e\subset I_1^e\cap I_2^e$. 如果 $I^e\subsetneq I_1^e\cap I_2^e$，则 $I=I^{ec}\subsetneq(I_1^e\cap I_2^e)^c=I_1^{ec}\cap I_2^{ec}=I_1\cap I_2$，矛盾. 所以 $I^e=I_1^e\cap I_2^e$. 如果 $I^e=I_1^e$，则 $I=I^{ec}=I_1^{ec}=I_1$. 因此如果 I 可约，则 I^e 可约. 反之如果 $I^e=I_1\cap I_2$，则 $I=I_1^c\cap I_2^c$，并且 $I=I_1^c$ 可导出 $I^e=I_1^{ce}=I_1$. 因此 I^e 可约导出 I 可约. 即证.

4.36 设 R 是交换环，X 是不定元，$f:R\to R[X]$ 是自然的嵌入，Q,I 是 R 的理想.

(i) 证明 Q 是 P-准素理想当且仅当 Q^e 是 $R[X]$ 的 P^e-准素理想；

(ii) 证明，如果 I 是 R 的可分解理想，

$$I=Q_1\cap\cdots\cap Q_n,\quad \sqrt{Q_i}=P_i$$

是 I 的准素分解，则 $I^e=\cap Q_i^e$ 是 I^e 的准素分解，$P_i^e=\sqrt{Q_i^e}$.

(iii) 证明如果 I 是 R 的可分解理想，则

$$\operatorname{ass}_{R[X]} I^e = \{P^e : P \in \operatorname{ass}_R I\}.$$

证明. (i) $Q^e = QR[X]$. Q^e 由系数属于 Q 的所有多项式组成. 如果 Q^e 准素，则若 $ab \in Q \subset Q^e, a, b \in R$，则必有 $a \in Q^e$ 或 $b^n \in Q^e$，而 $Q^e \cap R = Q$，故 Q 准素. 如果 Q 准素，设 $a(X)b(X) \in Q^e$，则或者 $a(X) \in Q^e$，或者 $a(X)$ 有系数不属于 Q. 如果这时 $b(X)$ 有系数不属于 $\sqrt{Q}$，则取 $a(X)$ 系数不属于 Q 的最低项和 $b(X)$ 系数不属于 $\sqrt{Q}$ 的最低项，两者的积不会被其他项相乘消掉，而不属于 Q^e，矛盾. 故 Q^e 也是准素的.

如果 Q 是准素理想，设 $f^n \in Q^e$，那么 f 的常数项属于 $\sqrt{Q}$，归纳可知 f 所有项的系数属于 $\sqrt{Q}$. 于是 $\sqrt{Q^e} = P^e$.

(ii) 因为 I^e 是系数属于 I 的多项式的全体，而 $\cap Q_i^e$ 表示的是系数属于 $\cap Q_i = I$ 的多项式全体，故两边相等.

(iii) (ii) 的直接结论.

4.37 设 R 是交换 Noether 环，Q 是 R 的 P-准素理想. 由 4.33，Q 可以表示为有限个 R 的不可约理想的交. 我们可以定义这样的表示

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} J_i,$$

其中 J_i 不可约，不冗余，意即对任意 $i = 1, \ldots, n$，

$$\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} J_j \not\subset J_i.$$

证明 J_i 都是 P-准素的.

证明. 按 4.16，这个准素分解可先按有相同的根理想合并，然后再去掉冗余项. 经过第一步后，其实不可能再有冗余项，否则我们将得到：存在 $i_1, \ldots, i_j$，

$$\bigcap_{i \notin \{i_1, \ldots, i_j\}} J_i \subset \bigcap_{i \in \{i_1, \ldots, i_j\}} J_i$$

于是

$$\bigcap_{i \neq j_1} J_i \subset \bigcap_{i \notin \{i_1, \ldots, i_j\}} J_i \subset \bigcap_{i \in \{i_1, \ldots, i_j\}} J_i \subset J_{i_1}$$

矛盾. 于是按根理想合并后就得到极小准素分解，因为 Q 是准素理想，所以这个分解只有一项. 因此，J_i 都有相同的根理想，等于 $\sqrt{Q} = P$.

4.38 设 R 是域 K 上的多项式环 $K[X_1, \ldots, X_n], \alpha_i \in K$. 令 $r \in \mathbb{N}, 1 \leq r \leq n$, 证明对于 $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{N}$ 的任一选择，理想

$$((X_1 - \alpha)^{t_1}, \ldots, (X_r - \alpha_r)^{t_r})$$

均是准素的.

证明. 因为 $K[X_1, \ldots, X_n]$ 和 $K[X_1 - \alpha_i, \ldots, X_r - \alpha_r, X_{r+1}, \ldots, X_n]$ 同构, 所以我们不妨设 $\alpha_i = 0$. 又由 4.36 题，我们不妨设 $n = r$. 此时，$(X_1, \ldots, X_r) \subset \sqrt{(X_1^{t_1}, \ldots, X_r^{t_r})} \subsetneq K[X_1, \ldots, X_r]$. 由于前者是极大理想，所以 $(X_1^{t_1}, \ldots, X_r^{t_r})$ 是准素理想.

4 Rings of fractions

5.6 设 I 是交换环 R 的真理想，Φ 表示 R 中所有和 I 不相交的乘法封闭子集. 证明 Φ 有关于包含关系的极大元，并且对于 R 的子集 S，S 是 Φ 的极大元当且仅当 $R\setminus S$ 是 I 的极小素理想.

证明. I 决定的闭集 $V(I)$ 非空. 任取 $\mathfrak{p}\in V(I)$，则 $R\setminus\mathfrak{p}$ 是与 I 不交的乘法封闭子集，故 Φ 非空. 任取 Φ 中由包含关系构成的链 $S_1\subset S_2\subset\cdots$，对其中所有的元取并集 $S:=\cup_{i=1}^{\infty}S_i$，则任取 $a,b\in S$，则存在 i 使 $a,b\in S_i$，从而 $ab\in S_i\subset S$，这样 $S\in\Phi$ 是 $\{S_i\}$ 的上界，由 Zorn 引理 Φ 存在极大元.

取含 I 的素理想 $\mathfrak{p}$，则 $R\setminus\mathfrak{p}\in\Phi$. 如果 $S\in\Phi$ 是极大元，我们证明 $R\setminus S$ 是一个理想，从而是素理想. 设 $a\in R\setminus S$，而 $r\in R, ar\in S$. 这时 $a\notin I$，否则 $ar\in I\cap S$ 矛盾. 这时不妨考虑 $\langle S,a\rangle:=\{a^ns:s\in S,n\in\mathbb{N}\}$，不难验证也是乘法封闭子集而且真包含 S 且与 I 不相交（否则如果 $a^ns\in I$，则 $(ar)^ns\in S\cap I$ 矛盾)，与 S 的极大性矛盾. 因此 $ar\in R\setminus S$. 再设 $a\notin I, a\notin S$，则同样可证明存在 $s\in S$ 使 $as\in I$. 再设 $a,b\in R\setminus S$，而 $a+b\in S$，则 a,b 至少之一不属于 I. 总之，一定存在 $s,t,\in S$ 使 $as,bt\in I$. 于是 $(a+b)st\in S\cap I$ 矛盾. 这表明 $a+b\in R\setminus S$，从而 $R\setminus S$ 是素理想. 如果 $R\setminus S$ 不是极小素理想，取含在其中的极小素理想 $\mathfrak{p}$，则 $R\setminus\mathfrak{p}\in\Phi$ 真包含 S，与极大性矛盾. 所以 $R\setminus S$ 是极小素理想. 反之，如果 $S=R\setminus\mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{p}$ 是极小素理想而 S 不是极大元，则取含 S 的极大元，则 $R\setminus S$ 是含在 p 里的更小的素理想，矛盾.

5.7 设 S 是交换环 R 的乘法封闭子集，称 S 是饱和的，如果满足下面的条件：只要 $a,b\in R$ 使 $ab\in S$，则 a,b 均属于 S.

(i) 证明 S 是饱和的，当且仅当 $R\setminus S$ 是一些（也许为空）R 的素理想的并；

(ii) 令 T 是 R 的任意乘法封闭子集. 令 $\overline{T}$ 是所有含 T 的饱和乘法封闭子集的交. 证明 $\overline{T}$ 也是含 T 的饱和乘法封闭子集，于是 $\overline{T}$ 是含 T 的最小的饱和乘法封闭子集；（称 $\overline{T}$ 是 T 的饱和化）

(iii) 证明
$$\overline{T}=R\setminus\bigcup_{\substack{P\in\mathrm{Spec}(R)\\ P\cap T=\varnothing}}P.$$

证明. (i) 如果 $R\setminus S$ 是一些素理想的并，现在设 $ab\in S$. 如果 $a\notin S$，则存在素理想 P，$a\in P$，而 $P\subset R\setminus S$. 于是 $ab\in P$ 从而与 $ab\in S$ 矛盾. 于是 $a\in S$，同理 $b\in S$. 反之，如果 S 是饱和的，我们证明对任何 $a\in R\setminus S$，都存在素理想 P，使 $a\in P\subset R\setminus S$. 为此我们证明 $(a)\cap S=\varnothing$，而事实上 $ab\in S$ 蕴含 $a\in S$ 与 a 的选取矛盾. 于是取与 S 不交的含 (a) 的极大理想即可.

(ii) 因为若 $ab\in\overline{T}$，则 a,b 均属于任一含 T 的饱和乘法封闭子集，从而 a,b 均属于 $\overline{T}$.

(iii) $R\setminus\bigcup_{\substack{P\in\mathrm{Spec}(R)\\ P\cap T=\varnothing}}P$ 是含 T 的饱和乘法封闭子集，所以 $\overline{T}\subset R\setminus\bigcup_{\substack{P\in\mathrm{Spec}(R)\\ P\cap T=\varnothing}}P$. 另一方面要证 $R\setminus\overline{T}\subset\bigcup_{\substack{P\in\mathrm{Spec}(R)\\ P\cap T=\varnothing}}P$. 但这是显然的，因为 $R\setminus\overline{T}$ 也一些素理想的并，而且这些素理想不含 T 中的元.

5.12 设 S 和 T 是交换环 R 的乘法封闭子集，$S\subset T$. 这时，因为 $R\to T^{-1}R$ 使所有 S 的元素可逆，所以分解通过 $R\to S^{-1}R\to T^{-1}R$，记 $h:S^{-1}R\to T^{-1}R$. 证明下述等价：

(i) 同态 h 是同构;

(ii) 对任意 $t\in T$，$t/1\in S^{-1}R$ 是单位;

(iii) 对任意 $t\in T$，存在 $a\in R$ 使 $at\in S$;

(iv) $T\subset\overline{S}$，其中 $\overline{S}$ 是 S 的饱和化;

(v) 只要 $P\in\operatorname{Spec}(R)$ 使 $P\cap S=\varnothing$，则 $P\cap T=\varnothing$.

证明. (i)⇒(ii). 当 h 是同构时，因为 $h(t/1)$ 可逆，故 $t/1$ 可逆，是单位.

(ii)⇒(iii). 当 $t/1\in S^{-1}R$ 可逆时，设 $at/b=(a/b)(t/1)=1$，则存在 $c\in S$，使 $ats=bs$，于是 $(as)t\in S$.

(iii)⇒(iv). 对任意 $t\in T$，存在 $a\in R$ 使 $at\in S$，则 $a,t\in\overline{S}$. 从而 $T\subset\overline{S}$.

(iv)⇒(v). 因为 $P\in\operatorname{Spec}(R)$ 使 $P\cap S=\varnothing$，故 $P\subset R\setminus\overline{S}\subset R\setminus T$，于是 $P\cap T=\varnothing$.

(v)⇒(i). 现在设 h 不是同构，$h(r/s)=0$，于是存在 $t\in T$，$rt=0$，但不存在 $u\in S$ 使 $ru=0$，即 $(0:r)\cap S=\varnothing$，但 $(0:r)\cap T\neq\varnothing$. 取含 $(0:r)$ 而和 S 不相交的极大理想则得到矛盾.

5.18 证明 3.67 中的环 R 同构于 $\mathbb{Z}$ 的一个分式环.

证明. 取 S 为所有不被 $p_1,\dots,p_t$ 整除的整数的集，则 S 是乘法封闭的. $R=S^{-1}\mathbb{Z}$.

5.26 设 S 是交换环 R 的乘法封闭子集，$f:R\to S^{-1}R$ 是自然同态. 证明如果 R 是 Noether 的，则 $S^{-1}R$ 亦然.

证明. 设 R 是 Noether 的. 设 I 是 $S^{-1}R$ 的理想，则 I^c 是有限生成的，设 $I^c=(a_1,\dots,a_n)$. 我们证明在 $S^{-1}R$ 中也有 $I=(a_1,\dots,a_n)$. 为此，设 $m/n\in I,n\in S$，由 5.25，可以取 $m\in I$. 设 $m=\sum_{i=1}^n b_ia_i, b_i\in R$，则 $m/n=\sum_{i=1}^n(b_i/n)a_i$. 故 $(a_1,\dots,a_n)$ 生成 I. 于是 $S^{-1}R$ 是有限生成的.

5.34 设 R 是非平凡交换环，对任意 $P\in\operatorname{Spec}(R)$，局部化 R_P 没有非零的幂零元，证明 R 没有非零的幂零元.

证明. 设 $a\in R$ 是非零幂零元，$a^n=0$，则在任何一个局部化 R_P 中均有 $(a/1)^n=0$. 由题意知 $(a/1)=0$，即存在 $s_P\notin P$ 使 $as_P=0$. 现在取含 $(0:a)$ 的极大理想 Q，则 $s_Q\in(0:a)\subset Q$，与 s_Q 的选取矛盾.

5.35 称有有限个极大理想的交换环为*拟半局部环*. 令 R 是交换环，$P_1,\dots,P_n$ 是其真素理想，证明 $S:=\cap_{i=1}^n(R\setminus P_i)$ 是乘法封闭子集，$S^{-1}R$ 是拟半局部环. 决定 $S^{-1}R$ 的极大理想.

注记. *这是 5.18 的推广.*

证明. 我们基本可以沿用 3.67 的证明. 先证明 S 非空. 因为如果 $R=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_n$，则 1 必属于某个 P_i，矛盾. 然后证明乘法封闭性：如果 $a,b\notin P_i,\forall i$，则 $ab\notin P_i,\forall i$，于是 S 对乘法封闭. 然后我们证明 $P_iS^{-1}R$ 是所有的极大理想. 因为 P_i 与 S 不交，$P_iS^{-1}R$ 是 $S^{-1}R$ 的真理想.

下面证明 $S^{-1}R$ 的极大理想 I 一定含于 $P_iS^{-1}R$ 之一. 因为 $I^c\cap S=\varnothing$，故 $I^c\subset\bigcup P_i$. 于是必有某个 i，$I^c\subset P_i$. 这样，$I=I^{ce}\subset P_iS^{-1}R$. 这样，$P_iS^{-1}R$ 就是所有的极大理想.

5.39 (i) 设 $\mathcal{I}$ 是 $S^{-1}R$ 的不可约理想，证明 $\mathcal{I}^c$ 是 R 的不可约理想.

(ii) 设 I 是 R 的不可约理想，$S \cap I = \varnothing$. R 是 Noether 的，证明 I^e 是 $S^{-1}R$ 的不可约理想.

证明. (i) 设 $\mathcal{I}^c = I_1 \cap I_2$，则 $I = I^{ce} = I_1^e \cap I_2^e$. 故 I 不可约蕴含 I^c 不可约.

(ii) 设 $I^e = I_1 \cap I_2$. 由于 I 准素，故 $I^{ec} = I$. 于是 $I = I^{ec} = I_1^c \cap I_2^c$. 故 I 不可约蕴含 I^e 不可约.

5.40 注记. 由本题的条件，从 $P_j \cap S \neq \varnothing$ 得到了 $Q_j^e = S^{-1}R$. 然而，5.37(i) 只告诉我们如果 $Q_j \cap S \neq \varnothing$，则 $Q_j^e = S^{-1}R$. 这时就要用 5.37(ii)，如果 $Q_j \cap S = \varnothing$，则 Q_j^e 也是准素理想且 $\sqrt{Q_j^e} = P_j^e$，但是 P_j^e 不是素理想，矛盾.

5.43 令 I 是交换环 R 的可分解理想，$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$，$\sqrt{Q_i} = P_i$ 为其极小准素分解. 令 $\mathcal{P} \subset \operatorname{ass} I$ 非空，使若 $P \in \mathcal{P}$，则对所有 $P' \in \operatorname{ass} I, P' \subset P$ 都有 $P' \in \mathcal{P}$. 证明

$$\bigcap_{\substack{i=1 \\ P_i \in \mathcal{P}}}^{n} Q_i$$

只取决于 I，而不取决于 I 的极小准素分解.

证明. 令 $S = R \setminus \cap_{P \in \mathcal{P}} P$. 考虑 $R \to S^{-1}R$，则 I^e 中，那些 $P_i \in \mathcal{P}$ 的 P_i 有 Q_i^e 为 $S^{-1}R$ 的准素理想. 而对于 $P_i \notin \mathcal{P}$ 的那些 P_i，则 $P_i \cap S \neq \varnothing$. 我们知道 $Q_i^e = S^{-1}R$. 于是 $I^e = \bigcap_{\substack{i=1 \\ P_i \in \mathcal{P}}}^{n} Q_i^e$，拉回得 $\bigcap_{\substack{i=1 \\ P_i \in \mathcal{P}}}^{n} Q_i$ 唯一被 I 确定，即 I^{ec}.

5.45 设 S 是交换环 R 的乘法封闭子集，P 是 R 的与 S 不相交的素理想. 于是 $PS^{-1}R$ 是 $S^{-1}R$ 的素理想（5.32(ii)）. 证明存在环同构

$$\chi : R_P \xrightarrow{\cong} (S^{-1}R)_{PS^{-1}R}$$

使得对所有 $r \in R, t \in R \setminus P$ 有 $\chi(r/t) = (r/1)/(t/1)$.

证明. 不难验证 $\chi(r/t)$ 合理，不依赖于 r, t 的具体选取，而且保持加法和乘法，所以是环同态. 若 $(r/1)/(t/1) = 0$，则存在 $u/v \in PS^{-1}R$ 使 $(u/v)(r/1) = 0$，从而存在 $w \in S$ 使 $wur = 0 = wut0$，从而 $r/t = 0$. 这表明 χ 是单射. 对于 $(a/s)/(p/t) \in (S^{-1}R)_{PS^{-1}R}$，其中 $p \notin P$，则由 $apst = apst \Rightarrow aps/s = apt/t \Rightarrow (a/s)(ps/1) = (at/1)(p/t)$，于是 $(a/s)/(p/t) = (at/1)/(ps/1) = \chi(at/ps)$. 所以 χ 是满射.

注记. 本题中为了定义 R_P 和 $(S^{-1}R)_{PS^{-1}R}$ 用到 P 是素理想；而证明满射时，要求 $ps \notin P$ 又用到 $S \subset R \setminus P$. 而若假设 P 与 S 相交，则 $PS^{-1}R = S^{-1}R$，这时同构自然不存在.

5.47 P 是交换环 R 的素理想，$m, n \in \mathbb{N}$.

(i) 如果 P^n 有准素分解，则 P 是其唯一的孤立素理想，$P^{(n)}$ 是 P^n 任何极小准素分解中的 P-准素项；

(ii) 设 $P^{(m)}P^{(n)}$ 有准素分解，则 P 是其唯一的孤立素理想，$P^{(m+n)}$ 是其任何极小准素分解中的 P-准素项；

(iii) $P^{(n)} = P^n$ 当且仅当 P^n 是 P-准素的.

证明. (i) 设 $P^n = \cap Q_i$ 为准素分解，则 $P = \sqrt{\cap Q_i} = \cap\sqrt{Q_i}$. 这样 P^n 任何孤立素理想一定含 P, 从而 P 是唯一的孤立素理想. 现在设 Q 是 P^n 极小准素分解中的 P-准素项, 则 Q^e 是 R_P 中 $(P^e)^n$ 的极小准素分解中的 P-准素项，这意味着 $Q^e = (P^e)^n$，于是 $P^{(n)} = (Q^e)^c \subset Q$. 由极小性，$Q = P^{(n)}$.

(ii) 因为 $\sqrt{P^{(m)}P^{(n)}} = \sqrt{P^{(m)}} \cap \sqrt{P^{(n)}}$, 而 $\sqrt{((P^e)^n)^c} = (\sqrt{(P^e)^n})^c = (P^e)^c = P$, 故其任何孤立素理想一定含 P. 而由于 $((P^{(m)})(P^{(n)}))^e = (P^{(m)})^e(P^{(m)})^e = (P^e)^{m+n}$，故前者的极小准素分解中如果 Q 是 P-准素项, 则 $Q^e = (P^e)^{m+n}$ 是 P^e-准素项, 于是 $Q^{ec} = P^{(m+n)} \subset Q$. 由极小性，$Q = P^{(m+n)}$.

(iii) 如果 P^n 是 P-准素的，则 P^n 就是 P^n 的极小准素分解，由 (i) $P^n = P^{(n)}$. 反之，如果 $P^n = P^{(n)}$，显然 P^n 是 P-准素理想.

5.48 R 是非平凡的交换环，对所有的 $P \in \operatorname{Spec} R$ 都有 R_P 是整环，那么 R 一定是整环吗?

证明. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 就是例外. 一般地[1], 令 A, B 是两个环, 考虑 $A\times B$ 的理想 $\mathcal{I}$. $(1,0)\mathcal{I}$ 的第一分量对 $A\times 0$ 的乘法封闭, 所以等于 $I\times 0$, 其中 I 是 A 的理想. 同理 $0\times B \subset \mathcal{I}$. 于是由加法得 $I\times J \subset \mathcal{I}$. 另一方面 $(1,0)\mathcal{I} \subset I \times 0, (0,1)\mathcal{I} \subset 0 \times J$，这保证 $\mathcal{I} = I \times J$. 又 $A \times B \to (A/I) \times (B/J)$ 的自然映射 π，其核 $\ker\pi$ 满足 $(x,y) \in \ker\pi \iff x \in I \wedge y \in J \iff (x,y) \in I \times J$. 故 $(A \times B)/(I \times J) \simeq (A/I) \times (B/J)$. 如果 A, B 均不为零，则 $A \times B$ 中有 $(1,0)(0,1) = 0$，不是整环. 因此，$A \times B$ 是整环时一定有 $A = 0$ 或 $B = 0$. 设是 $B = 0$，这时 $A \times 0$ 同构于 A，故 A 也是整环. 现在研究 $A \times B$ 的素理想，由上知 $A \times B$ 的素理想 $I \times J$ 总要求 $A/I, B/J$ 之一为零，另一者为整环，于是形如 $\mathfrak{p} \times B$ 或 $A \times \mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{p}$ 为 A 或 B 的素理想.

最后观察 $A \times B$ 在 $\mathfrak{p} \times B$ 处的局部化，设 $(a,b)/(s,t)$ 是其中的元，我们将其映到 $a/s \in A_{\mathfrak{p}}$. 这显然是满射，要证明这是单射，只要证明 $(0,b)/(s,t)$ 彼此相等. 但分子分母同乘 $(1,0)$ 得 $(0,0)/(s,0) = 0$. 于是证明了这是同构. 这样，如果 A, B 是一般的非平凡整环，就是满足条件的反例. 特别地，取 $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 就得 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

注记. 从几何上看，$\operatorname{Spec} A \times B$ 同胚于 $\operatorname{Spec} A$ 和 $\operatorname{Spec} B$ 的余积，于是不连通，$A \times B$ 不是整环，尽管从每点局部上看是一个整环的谱.

5 Chain conditions on modules

7.2 对 Noether 模 M 的自同态 u，满性蕴含是同构.

证明. 因为 $\ker u \subset \ker u^2 \subset \cdots$，故总存在 $n > 0$，$\ker u^n = \ker u^{n+1}$. 现在设 $x \in \ker u^n$，因为 u 是满射，存在 $y \in M$，$x = uy$，则 $u^{n+1}y = 0$，于是 $u^n y = 0$，从而 $u^{n-1}x = 0$. 即 $\ker u^{n-1} = \ker u^n$. 这样递推，$\ker u = \ker u^2$. 现在设 $x \in \ker u$，则存在 y，$x = uy$，于是 $u^2 y = 0$，$uy = 0$，从而 $x = 0$，即 $\ker u = 0$.

[1]参照 https://math.stackexchange.com/questions/146951/if-the-localization-of-a-ring-r-at-every-prime-ideal-is-an-integral-domain-mu/147003

注记. 有限性条件经常导致类似的结论，如 *Fitting* 分解定理和 *Schur* 定理等等.

7.4 Artin 模 M 的单自同态 v 是同构.

证明. 同样找到 $\operatorname{im} v^n = \operatorname{im} v^{n+1}$. 对任意 $x \in M$，$v^n x = v^{n+1} y$，由于 v 是单射，则 $x = vy$，可见 v 是满射.

7.8 (i) 证明域同时是 Artin 和 Noether 环;

(ii) 证明 Artin 的 PID 是域.

证明. (i) 显然，因为域只有两个理想. 设 PID R 是 Artin 的. 任取 $a \in R$，则存在 n 使 $(a^n) = (a^{n+1})$，从而 $a^n = a^{n+1} b$，因为 R 是整环，如果 $a \neq 0$，必有 $1 = ab$，从而 a 可逆.

7.46 设 G 是非平凡 Noether 环 R 上的模. 证明 G 是有限长度的，等价于 G 是有限生成的且存在 $n \in \mathbb{N}$ 和极大理想 $M_1, \ldots, M_n$ 使 $M_1 \cdots M_n G = 0$.

证明. 必要性. 考虑链

$$0 = M_1 \cdots M_n G \subset M_1 \cdots M_{n-1} G \subset \cdots \subset M_1 G \subset G$$

相邻项的比是被某个极大理想零化的，所以其实是相应剩余类域上的线性空间，又是有限生成的，即是线性空间，所以是有限长度的，这样递推得 G 也是有限长度的.

另一方面，设 G 的合成列是

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G,$$

相邻项的商 G_i/G_{i+1} 是单模，故其零化子 $\mathfrak{p}$ 是 R 的极大理想（否则 G_i/G_{i+1} 是环 $R/\mathfrak{p}$ 上的忠实模，任取一非零元，则 $R/\mathfrak{p}$ 的极大理想生成其一个真 $R/\mathfrak{p}$-子模，与单性矛盾）. 这些零化子就是所要的 $M_1, \ldots, M_n$. 又由 G 是有限长的，一定是有限生成的.

6 Commutative Noetherian Rings

8.5 证明 $\mathbb{C}$ 的子环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 是 Noether 的.

证明. 它是 $\mathbb{Z}[X]/(X^2+5)$ 的商环，所以是 Noether 的（这里用了 Hilbert 基定理）. 或者把 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 看成 $\mathbb{Z}$-模，则它是有限生成的，所以是 Noether 的.

8.10 设 R 是交换环，S 是交换 R-代数，带有结构环同构 $f: R \to S$. 令 $R' = \operatorname{im} f$. 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$. 证明 $R'[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ 等于

$$\left\{ \sum_{i=(i_1,\ldots,i_n)\in\Lambda} r_i' \alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_n^{i_n} : \Lambda \subset \mathbb{N}_0^n, \Lambda \text{ 有限}, r_i' \in R' \quad \forall i \in \Lambda \right\}.$$

证明. 记后者为 R''，则 $\alpha_i \in R''$ 且 R'' 确实是 R-代数. 所以 $R' \subset R''$. 另一方面，由 $\alpha_i \in R'$，则对任何 $a \in R''$，a 是有限个 α_i 的积的有限线性组合，故 $a \in R''$，于是 $R' = R''$.

注记. 在代数中有许多类似的概念采用"含某物的极小对象"的抽象定义，而又可证明具体地写出来是由一些元素的有限线性组合构成的全体.

8.15 设 R 是交换环，X 是不定元. $R[X]$ 或 $R[[X]]$ 是 Noether 环时，R 是 Noether 环吗?

证明. 是，因为均可构造到 R 的满射（或者说可商去理想 (X)）.

注记. 于是对于交换环 R，$R, R[X], R[[X]]$ 的 *Noether* 性彼此等价.

8.28 设 (R, M) 是 Noether 局部环，I 是 R 的理想，证明 $\cap_{n=1}^{\infty}(I + M^n) = I$.

证明. 只要转向 R/I，它也是 Noether 局部环. 因为一定有 $I \subset M$，而如果记 $\bar{}$ 为商映射，则 R/I 中 $\cap \bar{M}^n = 0$，拉回知 $\cap(I + M^n) = I$.

8.39 **注记.** 从本命题可看出，*Artin* 整环都是域，这是对 *7.8(ii)* 题的推广.

7 Some applications to field theory

12.50 令 $F \subset K$ 为域扩张，证明"关于 F 代数等价"关系是 K 的有限子集间的等价关系.

证明. 显然任何有限子集都是代数等价于自己的，而且由定义中 (α_i) 和 (β_j) 地位相同，这个关系有自反性. 最后，12.46 告诉我们传递性. 于是代数等价是等价关系.

12.57 设 $F \subset L$ 是域扩张，L 在 F 上有有限的超越次数. K 是 F 和 L 间的中间域，则 $\operatorname{tr.deg}_F K$ 和 $\operatorname{tr.deg}_K L$ 均有限.

证明. 设 $\operatorname{tr.deg}_F L = n$，取 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ 为 L 在 F 上的超越基. 对 K 中任意代数独立集 $\beta_1, \ldots, \beta_m$，总有 β_i 与 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 代数相关，所以 $m \leq n$，即 $\operatorname{tr.deg}_F K \leq n$ 为有限. 又设 $\beta_1, \ldots, \beta_m$ 是 L 中有限的 K 代数独立集，那么一定也是 F 代数独立集，一样有 $m \leq n$. 于是 $\operatorname{tr.deg}_K L \leq n$ 亦为有限.

12.58 设 $S = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$，$n > 1$. 证明 $f := X_1^2 + \cdots + X_n^2$ 不可约，于是由 3.42，(f) 是 S 的素理想. 令 F 为整环 $S/(f)$ 的分式域，注意 F 可以自然的方式表示为 $\mathbb{R}$ 的扩域. 求 $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{R}} F$.

证明. 设 $f = g(X)h(X)$ 且 g, h 与 f 不相伴. 先看成 $\mathrm{R}(X_1, \ldots, X_{n-1})[X_n]$ 中的分解，则不妨设 $g(X) = X_n - g_1(X), h(X) = X_n - h_1(X)$，其中 $g_1, h_1 \in \mathrm{R}(X_1, \ldots, X_{n-1})$ 不为 0 多项式. 于是 $g_1(X) + h_1(X) = 0$，而 $-g_1(X)^2 = g_1(X)h_1(X) = X_1^2 + \cdots + X_{n-1}^2$. 然而两侧都是多项式，零点有限，则存在一组数使两边不为 0，此时左边为负，右边为正，矛盾. 故 f 不可约.

用 x_i 表示 X_i 在 F 中的像. 则 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上代数无关. 否则若 $p(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$，则 $p(X_1, \ldots, X_{n-1}) \in (f)$，从而 p 一定出现 X_n，矛盾. 而 $F = \mathbb{R}(x_1, \ldots, x_{n-1})(x_n)$ 是 $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ 的代数扩张，所以 $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{R}} F = n - 1$.

8 Integral dependence on subrings

13.25 设 $R, S_1, \dots, S_n \quad (n \geq 1)$ 为交换环，$f_i : R \to S_i$ 为整的环同态，证明 $f : R \to \prod S_i, f(r) = (f_1(r), \dots, f_n(r))$ 也是整的.

证明. 对任意 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$，取首一多项式 $\phi_i(X) \in R[X]$ 零化 s_i. 则如果用映射 f 看成 $\prod S_i$ 中的多项式，则 $\phi_i(s)$ 的第 i 分量为 0. 于是 $\prod \phi_i(X)$ 零化 s，即 s 在 $f(R)$ 上整，f 是整的同态.

13.35 设 R 的交换环 S 的子环，S 在 R 上整.

(i) 如果 $r \in R$ 是 S 里的单位，则 r 是 R 里的单位.

(ii) 证明 $J(R) = J(S) \cap R$.

证明. (i) 设 $r \in R$ 是 S 里的单位，$rs = 1, s \in S$，而 s 满足 $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. 两边乘 r^n 得 $1 + a_{n-1}r + \cdots + a_0 r^n = 0$. 于是

$$r(-a_{n-1} - \cdots - a_0 r^{n-1}) = 1$$

即 r 在 R 中也是单位.

(ii) 如果 $r \in J(S) \cap R$，则对于所有 $a \in S$，$1 - ra$ 是 S 的单位，进而是 R 的单位，于是对于所有 $a \in R$，$1 - ra$ 是 R 的单位，于是 $r \in J(R)$. 另一方面，S 任一极大理想拉回到 R 均是极大理想，而且 R 任一极大理想均可由 S 一个极大理想拉回得到（13.31），故 $J(R)$ 的元均在 S 所有极大理想中，即在 $J(S)$ 中. 于是证明了相等.

13.36 设 R 是非平凡交换环，G 是 R 的自同构群的有限子群. 证明

$$R^G := \{r \in R : \forall \sigma \in G, \sigma(r) = r\}$$

是 R 的子环，R 在 R^G 上整. 设 $P \in \mathrm{Spec}(R^G)$，令

$$\mathcal{P} := \{Q \in \mathrm{Spec}(R) : Q \cap R^G = P\},$$

令 $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}$. 证明 $Q_1 \subset \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(Q_2)$，进而存在 $\tau \in G$ 使 $Q_1 = \tau(Q_2)$. 最后得到 $\mathcal{P}$ 是有限集.

证明. 显然总有 $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1$. 如果 $\sigma(r) = r, \sigma(s) = s$，则 $\sigma(rs) = \sigma(r)\sigma(s) = rs, \sigma(r + s) = \sigma(r) + \sigma(s) = r + s$. 于是 R^G 是 R 的子环. 对于 $r \in R$，$\prod_{\sigma \in G}(X - \sigma(r))$ 的系数均属于 R^G，而零化 r，故 R 在 R^G 上整.

任取 $a \in Q_1$，则 $\prod \sigma(a) \in Q_1$ 被 G 固定，故 $\prod \sigma(a) \in R^G \cap Q_1 = P \subset Q_2 \cap R^G$. 于是必有一个 $\sigma(a) \in Q_2$，或 $a \in \sigma^{-1}(Q_2)$，从而 $Q_1 \subset \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(Q_2)$.

由于 $\sigma(Q_2) \in \mathcal{P}$ 均是素理想，故 Q_1 必属于某个 $\tau(Q_2)$. 由不可比较性定理，$Q_1 = \tau(Q_2)$. 因此取定 $Q_2 \in \mathcal{P}$，则 $\mathcal{P} \subset \{\sigma(Q_2) : \sigma \in G\}$ 是有限集.

13.37 设 $f: R \to S$ 是交换环的同态，$P \in \mathrm{Spec}(R)$，证明存在 $Q \in \mathrm{Spec}(S)$ 使 $Q^c = P$ 当且仅当 $P^{ec} = P$.

证明. 如果 $Q \in \mathrm{Spec}(S)$，$Q^c = P$，自然 $P^{ec} = Q^{cec} = Q^c = P$. 如果 $P^{ec} = P$，则对任意 $x \in R \setminus P$，$f(x) \notin P^e$，即 $P^e \cap f(R \setminus P) = \varnothing$. 取极大的理想 $Q \supset P^e$ 使 $Q \cap f(R \setminus P) = \varnothing$，则 Q 是素理想而 $P \subset Q^c$，但 $Q^c \cap (R \setminus P) = \varnothing$，于是 $Q^c = P$.

13.42 设 R 是交换环，f 是首一非常数的多项式，证明存在交换环 $R' \supset R$ 使 f 在 $R'[X]$ 中分裂成线性因子的积.

注记. *本题未要求 R 是整环.*

证明. 不妨设 f 没有在 R 中的根，则 $R \to R[X]/fR[X] = R'$ 是单射. 设 R' 中的 $X + fR[X] = \bar{X}$，则 f 作为 $R'[X]$ 中的多项式有 $f(\bar{X}) = 0$. 于是 $\bar{X}$ 是 f 的一个根，由综合除法 $(X - \bar{X})$ 是 f 在 $R'[X]$ 中的一个因式. 设 f' 是 $R'[X]$ 中将 f 去掉所有一次因式所得，则其次数严格小于 f，这样就可以用归纳法得证.

13.43 R 是交换环 S 的子环. 设 f, g 是 $S[X]$ 中的首一多项式，fg 所有系数都在 R 上整，证明 f, g 的系数也都在 R 上整.

证明. 由 13.42，存在 S 的扩环 S'，f, g 在 $S'[X]$ 中均可写为一次因式的乘积，设 $f = \prod(X - \alpha_i), g = \prod(X - \beta_j), \alpha_i, \beta_j \in S'$. 考虑 R 在 S' 中的整闭包 R'，则 $fg \in R'[X]$，所以 α_i, β_j 在 R' 上整，而 R' 在 S' 中的整闭包仍是 R'，于是 $\alpha_i, \beta_j \in R'$. 于是 f, g 所有系数都属于 R'，即在 R 上整.

9 Dimension theory

15.1 注记. *本命题似乎不需要 Noether 性. 由本命题，我们研究一个素理想的高度可以转向在它处的局部化，即假设环是局部环.*

15.2 注记. *Noether 性用在了中山引理上.*

15.3 设 P, Q 是 Noether 交换环的素理想，$P \subsetneq Q$. 证明如果 $P \subsetneq Q$ 之间可以插入项，则实际上有无穷多素理想夹在 P, Q 之间.

证明. 转向 R/P，这时 Q/P 是 Noether 整环 R/P 的真素理想，于是我们下面设 R 是整环，$P = 0$. 设 $0 \subsetneq Q_i \subsetneq Q, \quad (1 \le i \le n)$ 是所有 P, Q 之间的素理想，则 $\cup Q_i \subsetneq Q$，否则一定有某个 i，$Q = Q_i$ 矛盾. 取 $a \in Q \setminus \cup Q_i$，考虑含 a 的极小素理想 Q_{n+1}. 因为 R 是整环，由 Krull 主理想定理，Q_{n+1} 不含有 (0) 以外的素理想，这样 $Q_{n+1} \subset Q$ 一定是真包含，否则与 Q 的条件矛盾. 于是 Q 不可能真包含有限个素理想，即有无穷多素理想夹在 P, Q 间.

15.8 设 I, J 是交换 Noether 环的两个理想，$I \subsetneq J$. 那么是否一定有 $\mathrm{ht}\, I < \mathrm{ht}\, J$?

证明. 如果 I, J 都是素理想，那么这是对的. 不然，任取 I 不是素理想但是一个可分解理想，J 是含它的极小素理想，使 $\mathrm{ht}\, J$ 最小，注意可分解理想的极小素理想有限所以可以做到，则 $\mathrm{ht}\, I = \mathrm{ht}\, J$.

15.9 决定 $\mathbb{Z}$ 所有真理想的高度. 决定 PID R 的所有真理想的高度.

证明. $\mathbb{Z}$ 所有的非零素理想的高度均是 1，而 $\operatorname{ht}(0)=0$. 于是 $\mathbb{Z}$ 的所有真理想的高度都是 1. 如果 R 是 PID，则非零素理想是素元生成的理想，这种理想的高度只能是 1. 于是其所有真理想的高度都是 1.

15.10 令 K 是域，$R:=K[X,Y]$，$I:=(X^2,XY)$，确定 $\operatorname{ht}_R I$. I 可以由一个元生成吗?

证明. 我们知道在交换 Noether 环 R 里所有理想都是可分解的. 我们可以计算 $\sqrt{(X^2,Y)}=(X,Y)$，从而 (X^2,Y) 是准素的. 而 $I=(X^2,Y)\cap(X)$ 是准素分解，从而 I 的极小素理想只有 (X)（因 $(X)\subset(X,Y)$）. 于是 $\operatorname{ht} I=\operatorname{ht}(X)=1$.

但是 I 不能由一个元生成，因为设 $I=(f(X))$，则 $f(X)\mid X^2, f(X)\mid XY$，故 $f(X)\mid X$. 但是 $(X),(1)=R$ 均不等于 I，矛盾.

15.11 设 K 是域,$R:=K[X_1,X_2,X_3,X_4,X_5]$. 决定以下理想的高度:$(X_1,X_2,X_3,X_4),(X_1X_5,X_2X_5,X_3X_5,X_4X_5),(X_1,X_2)\cap(X_3,X_4),(X_1X_3,X_2X_3,X_1X_4,X_2X_4),(X_1,X_2)\cap(X_3X_5,X_4X_5)$.

证明. $(0)\subset(X_1)\subset(X_1,X_2)\subset(X_1,X_2,X_3)\subset(X_1,X_2,X_3,X_4)$,另一方面 $\operatorname{ht}(X_1,X_2,X_3,X_4)\le 4$，则 $\operatorname{ht}(X_1,X_2,X_3,X_4)=4$. $(X_1X_5,X_2X_5,X_3X_5,X_4X_5)\subset(X_5)\cap(X_1,X_2,X_3,X_4)$，所以 (X_5) 是它的所有极小素理想，$\operatorname{ht}(X_5)=1$，故它的高度也是 1. $(X_1,X_2)\cap(X_3,X_4)$ 是极小准素分解的形式，它的两个极小素理想是 $(X_1,X_2),(X_3,X_4)$，高度均是 2，所以它的高度也是 2. $(X_1X_3,X_2X_3,X_1X_4,X_2X_4)\subset(X_1,X_2)\cap(X_3,X_4)$，另一方面设 $X_1f+X_2g\in(X_3,X_4)$，其中 g 不含 X_1，则去掉 f,g 中含 X_3,X_4 的项后可设 g 是 X_2 的多项式，f 是 X_1,X_2 的多项式，由于 $X_1f+X_2g\in(X_3,X_4)$ 故 $X_1f+X_2g=0$，比较含 X_1 的项得 $f=0$，再得 $g=0$. 因此 $f,g\in(X_3,X_4)$. 从而 $(X_1X_3,X_2X_3,X_1X_4,X_2X_4)=(X_1,X_2)\cap(X_3,X_4)$，高度也是 2. 最后，$(X_3X_5,X_4X_5)=(X_5)\cap(X_3,X_4)$，所以最后一个理想的孤立素理想只有 (X_5)，高度是 1.

15.16 设 R 是交换 Noether 环，$a\in R$ 不是单位亦不是零因子. 令 $P\in\operatorname{Spec}(R)$，$a\in P$. 证明

$$\operatorname{ht}_{R/Ra} P/Ra=\operatorname{ht}_R P-1.$$

证明. 由 15.15 知

$$\operatorname{ht}_{R/Ra} P/Ra\le\operatorname{ht}_R P\le\operatorname{ht}_{R/Ra} P/Ra+1.$$

我们只要证明含 (a) 的极小理想一定真包含一个素理想. 为此我们只要证明它不是幂零根，然而它含 a，a 不是幂零元，故它含幂零根，这样必须取得第二个等号.

15.17 设 (R,M) 是 Noether 局部环，Q 是 R 的真理想. 证明下述命题等价:

(i) R-模 R/Q 是有限长的;

(ii) 含 Q 的素理想只有 M;

(iii) $\operatorname{ass}(Q)=\{M\}$;

(iv) Q 是 M-准素的；

(v) 存在 $h \in \mathbb{N}$，使 $Q \supset M^h$；

(vi) $\sqrt{Q} = M$.

证明. (ii)⇒(iii)：极大理想 M 是含 Q 唯一的素理想，则是它唯一的孤立素理想，且 Q 不能有嵌入素理想. (iii)⇒(ii)：此时 M 是含 Q 的孤立素理想，所以是唯一含 Q 的极小素理想，而 M 是极大理想，故是含 Q 的唯一素理想. (iii)⇔(iv) 显然. (iv)⇔(vi)：因为 M 是极大理想，(iv) 和 (vi) 等价. (v)⇒(vi)：显然 $M \subset \sqrt{Q}$. 又 Q 是真理想，故 $\sqrt{Q} \subsetneq R$. 于是 $M = \sqrt{Q}$. (vi) ⇒ (v)：这是 Noether 环的性质.

根据 7.46，R/Q 是有限长度的，当且仅当 R/Q 有限生成（然而是由 $1+Q$ 生成），而存在极大理想 $M_1, \ldots, M_n$ 使 $M_1 \cdots M_n(R/Q) = 0$. 因为 R 是局部环，所以等价于 $M^n(R/Q) = 0$，即等价于 $M^n \subset Q$. 于是完成了 (i)⇔ (v).

注记. 这个理想在 *Stacks Project* 称作 R 的定义理想（ideal of definition）.

15.20 设 (R, M) 是 d 维的 Noether 局部环，$a_1, \ldots, a_d$ 构成 R 的参数系. 令 $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$，则 $a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d}$ 也构成 R 的参数系.

证明. 设 $Q = (a_1, \ldots, a_d)$，则 $\sqrt{Q} = M$. 而 $\sqrt{a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d}} \subset \sqrt{Q}$，另一方面 $a_i \in \sqrt{a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d}}$，于是 $Q \subset \sqrt{a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d}}$，从而 $M = \sqrt{Q} = \sqrt{\sqrt{a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d}}} = \sqrt{a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d}}$，这样知 $\sqrt{a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d}} = M$，从而 $a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d}$ 也生成一个 M-准素理想，构成 R 的参数系.

15.24 设 (R, M) 是 Noether 局部环，G 是非零有限生成 R-模. 定义 G 的**维数** $\dim_R G$ 为环 $R/\operatorname{Ann}(G)$ 的维数. 证明，$\dim G$ 等于最小的整数 i，其使得存在 i 个元素 $a_1, \ldots, a_i \in M$ 使 $G/(a_1, \ldots, a_i)G$ 是有限长度的.

证明. 设 $I = \operatorname{Ann}(G)$. 则 $\operatorname{Ann}(G/(a_1, \ldots, a_i)G) = (I, a_1, \ldots, a_i)$. 我们知道 $G/(a_1, \ldots, a_i)G$ 是有限长度的等价于 $M^n \subset \operatorname{Ann}(G/(a_1, \ldots, a_i)G) = (I, a_1, \ldots, a_i)$. 转向 R/I，则等价于 $(M/I)^n \subset (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_i)$. 由 15.18，这样的 i 的最小值就是 R/I 的维数.